تمرين:

أثبت أن الزمرة الجزئية H من الزمرة التبولوجية G تكون مغلقة إذا وفقط إذا وجدت مجموعة جزئية مفتوحة U من G بحيث يكون $U\cap H\neq\phi$ و $U\cap H=U\cap\bar{H}$

الحل:

نفرض أن H مجموعة مغلقة ($H=\bar{H}$) بما أن $e\in H$ (لأن H زمرة جزئية) $\Rightarrow e\in\bar{H}$

$\Leftarrow$ توجد مجموعة مفتوحة U حاوية العنصر e ويكون من أجلها $U\cap H\neq\phi$ ويكون

$U\cap H=U\cap\bar{H}$

العكس:

لنفرض أنه توجد مجموعة مفتوحة $U\subseteq G$ بحيث يكون $U\cap H\neq\phi$ و $U\cap H=U\cap\bar{H}$

ليكن $x\in U\cap H \Rightarrow x\in U$ وبالتالي $x^{-1}U$ مجاورة للعنصر e $\Leftarrow$ توجد

مجاورة V للعنصر e بحيث يكون $V^2\subseteq x^{-1}U$ (وذلك حسب مبرهنة سابقة)

بما أن $U\cap H=U\cap\bar{H}$ $\Leftarrow$ $x^{-1}U\cap H=x^{-1}U\cap\bar{H}$ وذلك لأن ($x^{-1}U\cap H\subseteq x^{-1}U\cap\bar{H}$)

$$\forall y\in x^{-1}U\cap\bar{H}\Rightarrow y\in x^{-1}U \;\&\; y\in\bar{H}\Rightarrow xy\in U \;\&\; xy\in\bar{H}\ (x\in H\ \text{لأن})$$

$$xy\in U\cap\bar{H}=U\cap H\Rightarrow y\in x^{-1}U\cap H\Rightarrow x^{-1}U\cap\bar{H}\subseteq x^{-1}U\cap H$$

وبالاحتواءين ينتج المطلوب

$\bar{V}\cap x^{-1}U\cap H=\bar{V}\cap x^{-1}U\cap\bar{H}\Rightarrow\bar{V}\cap H=\bar{V}\cap\bar{H}\Rightarrow\bar{V}\cap H$ مغلقة

لأن ($\bar{V}\cap\bar{H}$ مغلقة) $\Leftarrow$ حسب مبرهنة سابقة

(أثبت أن الزمرة الجزئية H من الزمرة التبولوجية G مغلقة إذا وفقط إذا وجدت مجاورة مغلقة U للعنصر الحيادي e بحيث يكون $H\cap U$ مغلقة)

فإن H تكون مغلقة

تمرين:

لتكن $\{U\}$ جملة أساسية لمجاورات العنصر الحيادي e في الزمرة التبولوجية G

برهن أنه من أجل أي مجموعة جزئية A من G فإن $\bar{A}=\bigcap_{U} AU$

الحل :

١. $\bar{A} = \cap uA$ وذلك حسب مبرهنة سابقة

$\bar{A} = \cap uA \Rightarrow \bar{A} \subseteq uA \; ; \; \forall u \in \{u\} \Rightarrow \bar{A} \subseteq uA = uAe \; ; \; \forall u \in \{u\}$

$\Rightarrow \bar{A} \subseteq uAu \; ; \; \forall u \in \{u\} \Rightarrow \bar{A} \subseteq \cap uAu$ ①

$\forall x \in \cap uAu \Rightarrow x \in uAu \; ; \; \forall u \in \{u\}$

من اجل اي جوار متناظر P للعنصر x فإن $P^{-1}x$ جوار للعنصر e

⇐ $x \in P^{-1}xAP^{-1}x$ نضرب الطرفين بـ x^{-1} من اليمين

$\Rightarrow e \in P^{-1}xAP^{-1}$

منه يوجد $P_1, P_2 \in P$ بحيث

$e = P_1^{-1}xaP_2^{-1} \Rightarrow xa = P_1P_2 \in PP = P^2$

⇐ $a \in P$ & $x \in P$ ⇐

$x \in P$ & $A \cap P \neq \phi \Leftarrow x \in P$ & $a \in A \cap P$

⇐ $x \in \bar{A}$ ومنه $\cap uAu \subseteq \bar{A}$ ومن ① ينتج المطلوب

$\bar{A} = \cap uAu$

تمرين :

لتكن G زمرة طوبولوجية و H زمرة جزئية منها، أثبت أنه إذا كان كل من $H, G/H$ متراصة فإن G متراصة

الحل :

لتكن $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ تغطية مفتوحة للفضاء G ⇐ $G = \bigcup_{\alpha \in A} u_\alpha$

$\Rightarrow \left(\bigcup_{\alpha \in A} u_\alpha\right) \cap H = \bigcup_{\alpha \in A} (u_\alpha \cap H) = G \cap H = H$

$\Rightarrow \bigcup_\alpha (u_\alpha \cap H) = H$

هي تغطية لـ H أي $u_\alpha \cap H$ تغطية للفضاء الجزئي H وبما أن H متراص

محاضرات الدفتر

القسم :　　　السنة :　　　المادة :　　　المحاضرة :

إذن يمكن إيجاد تغطية جزئية منتهية من تلك التغطية أي أن

تغطية منتهية لـ H حيث أن $\alpha_i \in A$ مجموعة الدليل منتهية $\bigcup_{i=1}^{n} (U_{\alpha_i} \cap H) = H$

$$\Rightarrow \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}\right) \cap H = H \Rightarrow \boxed{H \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}} \quad \text{---} (1)$$

بما أن $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = G$ $\Leftarrow$ بأخذ الصورة وفق التطبيق القانوني

$$\Rightarrow k\left(\bigcup U_\alpha\right) = k(G) \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} k(U_\alpha) = G/H$$

أي أن الأسرة $k(U_\alpha)$ هي تغطية لـ G/H لكن G/H متراص فرضاً ومنه فإنه توجد تغطية جزئية منتهية من تلك التغطية

$$\bigcup_{j=1}^{m} \left(k(U_{\alpha'_j})\right) = G/H \quad ; \quad \alpha'_j \in A' \quad (j = 1, \ldots, m)$$

بأخذ k^{-1} للطرفين

$$k^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^{m} k(U_{\alpha'_j})\right) = k^{-1}(G/H) = G \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{m} \left(k^{-1} k(U_{\alpha'_j})\right) = G$$

تقاطع الطرفين مع $G-H$

$$\bigcup_{j=1}^{m} \left(k^{-1} k(U_{\alpha'_j}) \cap (G-H)\right) = G \cap (G-H)$$

$$\bigcup_{j=1}^{m} \left(k^{-1} k(U_{\alpha'_j})\right) \cap (G-H) = G-H$$

$$\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{m} \left(k^{-1} k(U_{\alpha'_j})\right) \cap \left(k^{-1}(\vec{G/H}) - k^{-1}(\{\vec{H}\})\right) = G-H$$

$$\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{m} k^{-1}\left(k(U_{\alpha'_j})\right) \cap \left(G/H - \{H\}\right) = G-H$$

$$\bigcup_{j=1}^{m}\left(f^{-1}\left(f(U'_{\alpha_j})\cap(f(G)-f(H)\right)\right)=G-H$$

$$\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{m}\left(f^{-1}\left(f(U'_{\alpha_j})\cap f(G-H)\right)\right)=G-H$$

$$=\bigcup_{j=1}^{m} f^{-1}\left(f(U'_{\alpha_j}\cap(G-H)\right)=G-H$$

بما أن f متباين على G-H (مقصور f على G-H متباين أي أن
($f^{-1}f(A)=A$)

$$\bigcup_{j=1}^{m}\left(U'_{\alpha_j}\cap(G-H)\right)=G-H$$

$$=\left(\bigcup_{j=1}^{m}U'_{\alpha_j}\right)\cap(G-H)=G-H \Rightarrow G-H\subseteq\bigcup_{j=1}^{m}U'_{\alpha_j} \quad \text{---} (2)$$

أي أن الأسرة U'_{α_j} تشكل تغطية جزئية منتهية لـ G-H وبالتالي فإن

$$\{U'_{\alpha_j}\}_{j=1}^{m}\cup\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^{n}$$

تشكل تغطية جزئية منتهية لـ $G=H\cup(G-H)$ أي أن G فضاء متراص لأنه أوجدنا تغطية جزئية منتهية من التغطية المفترضة $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$

تمرين :

a) إذا كانت G زمرة طبولوجية متراصة (متراصة محلية) و H زمرة جزئية من G اثبت أن G/H تكون متراصة (متراصة محلية)

b) إذا كانت G زمرة طبولوجية و H زمرة جزئية من G فأثبت أنه إذا كانت كل من H , G/H متراصة فإن G متراصة

محاضرات الدفتر

القسم : السنة : المادة : المحاضرة :

c) اذا كانت G زمرة طبولوجية اثبت أن $\overline{\{e\}}$ هي زمرة جزئية مغلقة ناظمية من G وبالتالي فإن $G/\overline{\{e\}}$ تكون زمرة طبولوجية هاوسدورفية

الحل:

a [ننتقل من فرض X انه مترابط محلياً اذا كان مفاهيم اي تعريفه منه x ومن اجل اي جوار V للنقطة x توجد جوار مترابط U بحيث أن $U \subseteq V$]

نفرض أن G مترابطة وبما أن h مستمر

$h(G) = G/H$ مترابطة (وذلك حسب مبرهنة

في الطبولوجيا

اذا كان $f: X \longrightarrow Y$ مستمر و X فضاء مترابط فإن

$f(x)$ يكون مترابط

• اما اذا كانت G مترابطة محلياً فإن $h(G)$ تكون مترابطة محلياً (حسب مبرهنة فضاء القسمة لاي فضاء مترابط محلياً هو مترابط محلياً)

b لنفرض أن كلاً من H و G/H فضاء مترابط، لنفرض جدلاً أن G غير مترابط عندئذ احتمالين:

1- توجد مجموعتين مفتوحتين A, B بحيث أن كل منهما تختلف عن H بحيث

$$A \cup B = G \qquad A \cap B = \phi$$

2- المجموعتين $G-H, H$ مفتوحتين وتحققان

$$H \cup (G-H) = G \quad و \quad H \cap (G-H) = \phi$$

3- نفرض أن A, B مفتوحتين في G وتحققان الشرطين السابقين فإن كل من $A \cap H$ ، $B \cap H$ تكون مفتوحة في الفضاء الجزئي H وأن

$$\cdot\ (A \cap H) \cap (B \cap H) = (A \cap B) \cap H$$
$$\phi \cap H = \phi$$

$$\cdot\ (A \cap H) \cup (B \cap H) = (A \cup B) \cap H$$
$$G \cap H = H$$

⇐ H غير مترابط وهذا غير ممكن لأن H فضاء مترابط

2) إذا كانت كل من H و G-H مفتوحة في G وبما أن ε التطبيق القانوني مفتوح
⇐ فإن كل من $\varepsilon(H)$, $\varepsilon(G-H)$ مفتوحة في G/H وكل

$\varepsilon(H) = \{H\}$

$\varepsilon(G-H) = G/H - \{H\}$

حيث أن

$(\{H\}) \cap (G/H - \{H\}) = \emptyset$

$(\{H\}) \cup (G/H - \{H\}) = G/H$

⇐ G/H غير مترابط ⇐ غير ممكن لأن G/H زمرة مترابطة ⇐ الفرض الجدلي خاطئ
⇐ G مترابطة

3) لقد رأينا سابقاً أن $\{e\}$ هي زمرة جزئية ثابتة من الزمرة الطبولوجية G
(حسب المبرهنة: إذا كانت H زمرة جزئية من الزمرة الطبولوجية G فإن
$\overline{H}$ تكون أيضاً زمرة جزئية وإذا كانت H ثابتة فإن $\overline{H}$ ثابتة)

فإن $\overline{\{e\}}$ تكون زمرة جزئية مغلقة ثابتة من الزمرة الطبولوجية G

• $\overline{\{e\}}$ مغلقة في G وبالتالي فإن $x\overline{\{e\}}$ مغلقة في G (هو هوميومورفيزم)
⇐ $(G - x\overline{\{e\}})$ مفتوحة في G وبما أن ε تطبيق مفتوح ⇐
$\varepsilon(G - x\overline{\{e\}})$ هي أيضاً مفتوحة
في $G/\overline{\{e\}}$

⇐ $\varepsilon(G - x\overline{\{e\}}) = G/\overline{\{e\}} - \{x\overline{\{e\}}\}$
مجموعة مفتوحة في $G/\overline{\{e\}}$
⇐ متممة $\{x\overline{\{e\}}\}$ مجموعة مغلقة في $G/\overline{\{e\}}$ وهي وحيدة العنصر ⇐ نقاط مجموعات
وحيدات العنصر في الفضاء $G/\overline{\{e\}}$ مغلقة حيث هذا الفضاء هو T_1 - فضاء
⇐ حسب مبرهنة سابقة التكافؤ في زمرة طبولوجية بين T_1 - فضاء و T_2 - فضاء
⇐ $G/\overline{\{e\}}$ هو T_2 - فضاء (فضاء هاوسدورف)